ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА

FUNDAMENTALS OF RELIABILITY ISSUES AND QUALITY

УДК 629.7.072.8

DOI 10.21685/2307-4205-2018-1-1

Э. В. Лапшин, А. К. Гришко, И. М. Рыбаков

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АВИАЦИОННЫМ ТРЕНАЖЕРАМ

E. V. Lapshin, A. K. Grishko, I. M. Rybakov

METHODS OF APPROXIMATION OF FUNCTIONS MANY VARIABLES APPLICABLE TO AVIATION TRAINERS

Аннотация. Структура математических моделей объектов, способы аппроксимации (интерполяции) их характеристик, методы и средства идентификации должны быть согласованы между собой и составлять единую информационную технологию, удобную для применения, в частности, в авиационных тренажерах. Вычислительные методы, применяемые при разработке имитаторов авиационных тренажеров, да и других технических средств обучения, можно разделить на общие и специальные. Общие методы представляют собой известные методы вычислительной математики, составляющие один из важнейших разделов прикладной математики вообще. Они реализованы в программном обеспечении универсальных ЭВМ, соответствующих программных «оболочках». В укрупненном виде информационная технология идентификации состоит из следующих этапов: получение исходных экспериментальных и расчетных данных; первичная обработка и создание массива данных; назначение областей аппроксимации в пространствах аргументов; выбор метода аппроксимации и выполнение аппроксимации; разработка рабочих алгоритмов; оценка точности. Идентификация, как правило, требует творчества, носит характер исследования и лишь в редких случаях может быть полностью формализована. Исследовательский итерационный характер носят, в частности, такие этапы, как назначение областей аппроксимации, выбор метода аппроксимации и др.

Abstract. The structure of the mathematical models of objects, methods of approximation (interpolation) of their characteristics, the methods and means of identification should be agreed among themselves and form a single information technology, convenient to use, in particular, in aircraft simulators. Computational methods used in the development of models of aircraft simulators and other technical teaching aids, can be divided into General and specific. Common methods are well-known methods of computational mathematics that make up one of the most important topics in applied mathematics at all. They are implemented in software on the mainframe, the relevant programme «shells». In the enlarged form of information technology of identification consists of the following stages: baseline experimental and calculated data; primary processing and creation of the data array; designation of areas of approximation in spaces of arguments; the choice of method of approximation and implementation of approximation; develop working algorithms; evaluation of accuracy. Identification usually requires creativity, nature study, and only in rare cases, it may be completely formalized. Iterative research are, inter alia, such as assigning areas of approximation, the choice of method of approximation, etc.

Ключевые слова: имитаторы авиационных тренажеров, математические модели объектов, способы аппроксимации (интерполяции) их характеристик, методы и средства идентификации, метод аппроксимации.

Key words: simulators aviation simulators, mathematical object model, methods of approximation (interpolation) of their characteristics, the methods and means of identification, method of approximation.

Введение

Аппроксимация характеристик летательного аппарата, силовой установки, бортового комплекса составляет часть информационной технологии идентификации авиационных комплексов. Как уже отмечалось, идентификация выполняется не только в интересах разработки технических средств обучения, но и для обеспечения многих других важнейших целей и этапов жизненного цикла авиационных комплексов: проектирования, испытаний, сертификации, эксплуатации.

Информационная технология идентификации и методы аппроксимации характеристик авиационных комплексов

Информационная технология идентификации в укрупненном виде состоит из следующих этапов:

- получение исходных экспериментальных и расчетных данных;
- первичная обработка и создание массива данных;
- назначение областей аппроксимации в пространствах аргументов;
- выбор метода аппроксимации и выполнение аппроксимации;
- разработка рабочих алгоритмов;
- оценка точности.

Идентификация, как правило, требует творчества, носит характер исследования и лишь в редких случаях может быть полностью формализована. Исследовательский итерационный характер носят, в частности, такие этапы, как назначение областей аппроксимации, выбор метода аппроксимации и др.

Таким образом, процедура идентификации в целом относится к человеко-машинным процедурам исследовательского характера.

Есть основания предполагать, что структура описательной модели исследовательской деятельности человека может быть получена путем комплексирования модели действий оператора по управлению и модели обучения.

Действительно, исследовательский процесс базируется как на знаниях и мыслительных экспериментах, подобно процессу обучения, так и на действиях по управлению в ходе физических и численных экспериментов.

Структурная схема исследовательской деятельности человека-оператора (например, разработчика авиационного тренажера в процессе идентификации) представлена на рис. 1. Она объединяет прогнозно-оптимизационный механизм синтеза с мыслительными, численными и физическими экспериментами, интерактивной адаптацией модели. Здесь принципы психофизиологической функциональной системы П. К. Анохина переносятся на исследовательскую деятельность.

Конечно, возможны варианты структуры деятельности исследователя. Так, могут быть включены звенья оптимального планирования экспериментов, применяемого в разнообразных задачах получения экспериментальных данных [1, 2]. Структура может быть расширена за счет включения экспертных обучающих блоков [3].

В целом подобные модели исследовательской деятельности в процессе идентификации относятся, к первым из упомянутых операций (получение исходных расчетных и экспериментальных данных, их первичная обработка, создание массивов). Для идентификации летательных аппаратов это – предметы вычислительной аэродинамики [4], трубных, стендовых, летных испытаний [5, 6].

К собственно аппроксимации в информационной технологии идентификации можно отнести четыре последние из вышеуказанных шести операций. Именно эти операции рассматриваются ниже с учетом следующих факторов [7]:

а) необходимый объем и качество (точность) исходного экспериментального и расчетного материалов;

б) вычислительные затраты и точность аппроксимации при рассматриваемом методе;

в) вычислительные затраты при воспроизведении характеристик в процессе моделирования;
г) воспроизведение производных, степень гладкости аппроксимирующей функции.

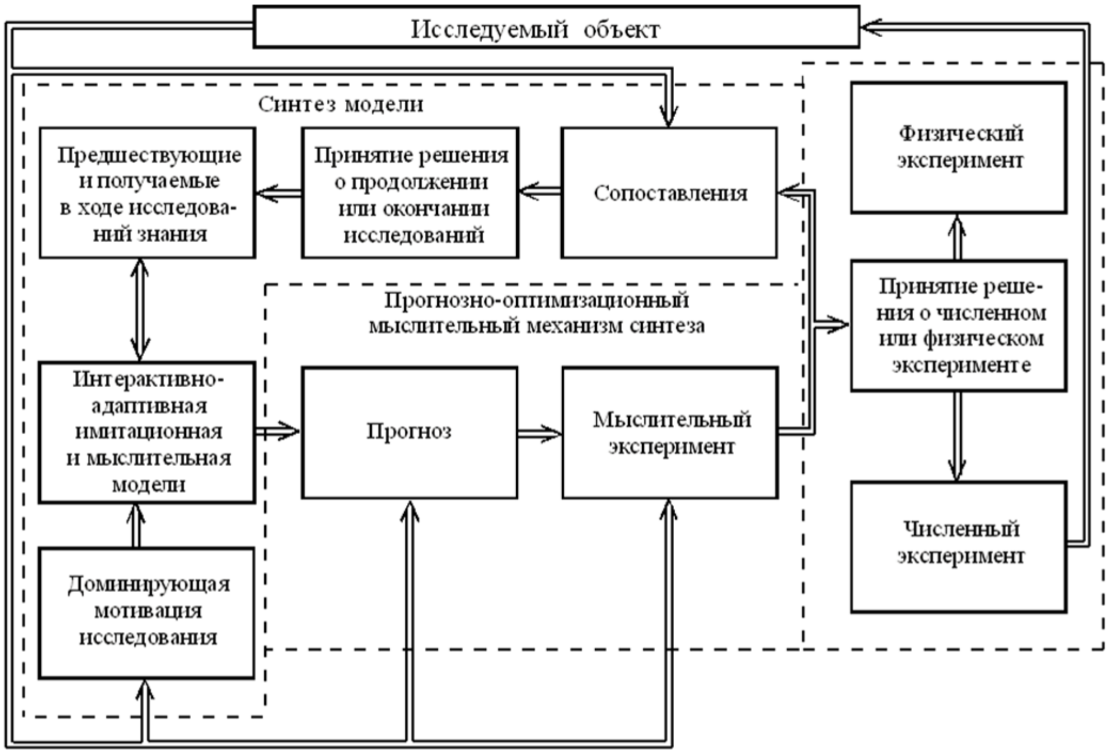

Рис. 1. Структурная схема исследовательской деятельности человека-оператора

Вспомогательные операции при аппроксимации

При эвристическом выборе метода аппроксимации (и параметров метода) важным является создание образа аппроксимируемой функции. Для сложных функций многих переменных — это непростая задача. Для иллюстрации обратимся к очень простому примеру. На рис. 2 приведены типовые характеристики коэффициента продольного момента $m_z\left(c_y, M\right)$ как функции числа M и коэффициента подъемной силы для дозвукового (рис. 2,*а*) и сверхзвукового (рис. 2,*б*) самолетов [8].

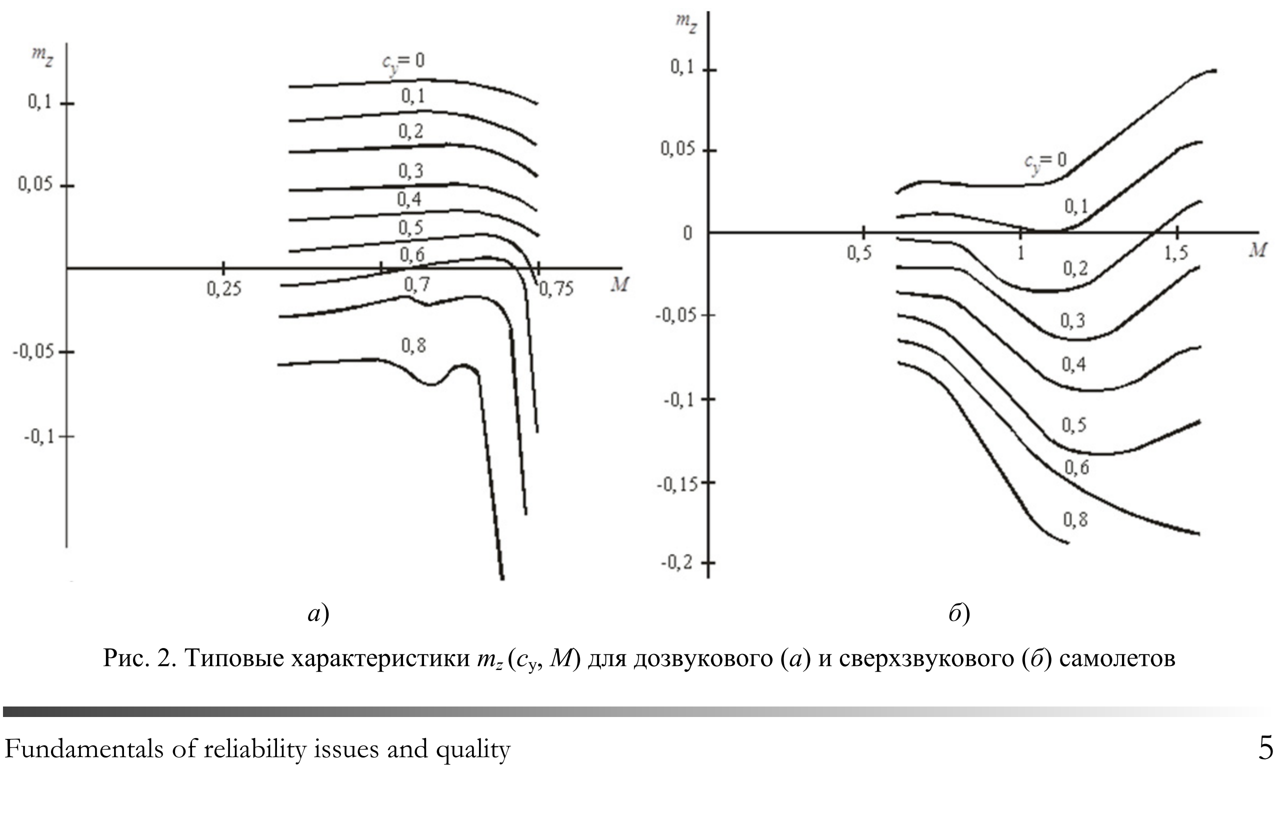

Рис. 2. Типовые характеристики m_z (c_y, M) для дозвукового (*а*) и сверхзвукового (*б*) самолетов

Виден достаточно сложный характер соответствующих поверхностей. Правда, современные стандартные программные средства машинной графики позволяют демонстрировать двумерные поверхности в наглядных изометрической и других проекциях.

Но число аргументов функции m_z и других функций может превышать пять и более. Мыслительные образы в многомерных пространствах формируются у человека с большим трудом вследствие его адаптированности к реальному двух- и трехмерному миру.

Ниже предлагается и обосновывается один из путей преодоления этих трудностей посредством перехода к спектральному представлению аппроксимируемых (интерполируемых) функций и формализованному определению густоты сетки интерполяции.

К числу вспомогательных операций при аппроксимации можно отнести и назначение областей аппроксимации в пространствах аргументов. Параметры полета, параметры режима силовой установки и другие компоненты вектора состояния современного авиационного комплекса подчиняются многочисленным сложным и достаточно жестким эксплуатационным ограничениям. Все эти ограничения должны выдерживаться в имитационном полете. При отработке умений и навыков действий в нештатных ситуациях эксплуатационные ограничения могут уступать место предельным ограничениям.

Эксплуатационные ограничения по высоте полета H и числу Маха M иллюстрирует рис. 3 [1, 7, 8]. Здесь указаны факторы, определяющие границы области ограничений: «болтанка» на малой высоте и высокой скорости, максимально допустимый по прочности конструкции скоростной напор $q_{\max}$, предельно допустимое (из-за нагрева) число $M_{пред}$, «тряска», минимальная (эволютивная) воздушная скорость $V_{\min}$.

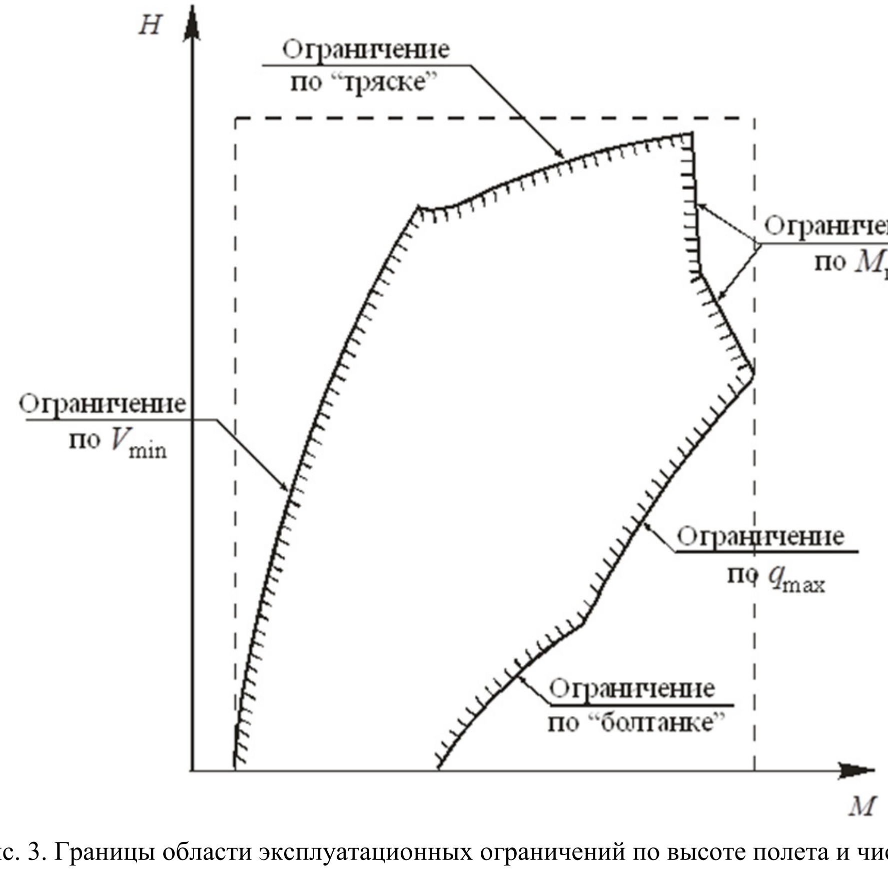

Рис. 3. Границы области эксплуатационных ограничений по высоте полета и числу Маха

Как только что отмечалось, эти и другие ограничения в имитируемом полете должны выдерживаться. Однако общая область ограничений в многомерном пространстве состояний получается очень сложной, неудобной для аппроксимации. Обычно целесообразно ее расширение до простой формы прямоугольного многомерного параллелепипеда в пространстве состояний. Соответствующее сечение этого параллелепипеда на рис. 3 обозначено пунктиром. Расширенную область в пространстве аргументов будем обозначать G_Σ. Она может включать часть, необходимую для имитации нештатных, критических режимов. Для этой части должен существовать исходный массив данных об аппроксимируемой функции и процесс аппроксимации, сходный с основной эксплуатационной областью. Кроме этого, G_Σ может содержать часть, дополняющую G_Σ до указанной простейшей формы. Здесь задача аппроксимации носит фиктивный характер, что будет пояснено в дальнейшем. Для этой части G_Σ нет необходимости иметь массив исходных данных об аппроксимируемой функции.

К вспомогательным операциям аппроксимации можно отнести назначение дискретных (логических) аргументов − признаков. Под этим понимается следующее. Для современных пилотируемых АК характерны универсальность, адаптивность, получаемые за счет изменения конфигурации, разнообразных органов разового управления. К таким средствам относится крыло переменной стреловидности, взлетно-посадочные средства (выпускное шасси, механизация крыла, тормозной парашют) и др. Эти средства обычно имеют лишь два (три) основных фиксированных положения, но влияние их на соответствующие характеристики существенно.

Так, если без учета изменения стреловидности и взлетно-посадочных средств коэффициент c_x считается функцией четырех аргументов: $c_x\left(\alpha, \beta, \delta_{\text{в}}, M\right)$, то с учетом угла стреловидности χ, выпуска шасси $\delta_{\text{ш}}$, тормозных щитков $\delta_{\text{тщ}}$ и тормозного парашюта $\delta_{\text{тп}}$ число аргументов возрастает до восьми:

$$c_x\left(\alpha,\beta,\delta_{\text{в}},M,\chi,\delta_{\text{ш}},\delta_{\text{тщ}},\delta_{\text{тп}}\right). \tag{1}$$

Увеличение числа непрерывных аргументов резко увеличивает затраты на идентификацию и аппроксимацию. Однако рассматриваемые дополнительные аргументы являются в обычных применениях дискретными: χ принимает три значения, а $\delta_{\text{ш}},\delta_{\text{тщ}},\delta_{\text{тп}}$ вообще обозначают признаки «убрано – выпущено». Поэтому (1) можно заменить набором характеристик

$$c_{x\nu}\left(\alpha,\beta,\delta_{\text{в}},M\right), \tag{2}$$

где номер ν соответствует конфигурации, например: минимальная стреловидность, все посадочные средства выпущены.

Полиномиальная аппроксимация

Пусть функция $f\left(x_1,x_2,\ldots,x_r\right)$, заданная в области $G_\sum \subset R^r$, аппроксимируется полиномом

$$\tilde{f} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r} a_{k_1k_2\ldots k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_1} \ldots x_r^{k_r}, \tag{3}$$

где суммирование по $k_j\left(j=1,2,\ldots,r\right)$ ведется в пределах от $k_j=0$ до N_j (целые положительные числа); $a_{k_1k_2\ldots k_r}$ − постоянные коэффициенты.

При полиномиальной аппроксимации по методу наименьших квадратов задача формулируется как

$$\min_{a_{k_1k_2\ldots k_r}} \int_{G_\sum} \left[f\left(x_1,x_2,\ldots,x_r\right) - \tilde{f}\left(x_1,x_2,\ldots,x_r\right)\right]^2 dx_1\ldots dx_r. \tag{4}$$

Из этого получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $a_{k_1k_2\ldots k_r}$:

$$\sum A_{k_1+l_1\ldots k_r+l_r} a_{k_1\ldots k_r} = B_{l_1\ldots l_r}. \tag{5}$$

Здесь $l_1,\ldots,l_r$ пробегают те же значения, что и $k_1,\ldots,k_r$. Коэффициенты A, B выражаются формулами

$$A_{k_1+l_1\ldots k_r+l_r} = \int\limits_{G_\Sigma} x_1^{k_1+l_1} \ldots x_r^{k_r+l_r} dx_1 \ldots dx_r \,, \tag{6}$$

$$B_{l_1\ldots l_r} = \int\limits_{G_\Sigma} f\left(x_1, \ldots, x_r\right) x_1^{l_1} \ldots x_r^{l_r} dx_1 \ldots dx_r \,. \tag{7}$$

Число неизвестных и число линейных уравнений здесь равны

$$N_\Sigma = \left(1+N_1\right)\left(1+N_2\right)\ldots\left(1+N_\Sigma\right). \tag{8}$$

При $r = 2, N_1 = N_2 = 3, N_\Sigma = 16$. Аппроксимирующий полином в этом случае имеет вид

$$\tilde{f} = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{02}x_2^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{30}x_1^3 + a_{03}x_2^3 + a_{21}x_1^2x_2 +$$
$$+ a_{12}x_1x_2^2 + a_{111}x_1x_2x_3 + a_{31}x_1^3x_2 + a_{13}x_1x_2^3 + a_{32}x_1^3x_2^2 + a_{23}x_1^2x_2^3 + a_{33}x_1^3x_2^3.$$

При тех же наибольших степенях $N_1 = N_2 = \ldots = N_r = 3$, но $r = 4$ $N_\Sigma = 256$, при $r = 5$ $N_\Sigma = 1024$. Из этого ясно, что для аппроксимации функций многих аргументов метод в его изложенной форме малопригоден. Решение системы линейных уравнений (в том числе плохо обусловленных) столь высоких размерностей всегда требует весьма высоких вычислительных затрат. В принципе возможно определение коэффициентов $a_{k_1k_2\ldots k_r}$ путем непосредственной минимизации функционала разности $f - \tilde{f}$ (см. выражение (4)). Для этого, в частности, может применяться новый эффективный метод решения многоэкстремальных задач. Характерно, что вычислительные методы решения различных задач оказываются взаимосвязанными. Однако трудности в отношении фактора в) (большие вычислительные затраты при воспроизведении функций многих аргументов) при полиноминальной аппроксимация сохраняются.

Заключение

Широко известный путь снижения вычислительных трудностей полиномиальной аппроксимации функций многих аргументов заключается в переходе к кусочно-полиномиальной аппроксимации. При этом вся область G_Σ разбивается на подобласти (субобласти), в которых аппроксимирующие полиномы могут иметь пониженные степени при сохранении точности аппроксимации. Разбиение на субобласти иногда ведется на основе физических закономерностей (например, дозвуковые, трансзвуковые и сверхзвуковые режимы полета). В этом случае субобласти обычно получаются крупными и трудности, связанные с высокими необходимыми степенями полиномов и высокими размерностями пространства аргументов, в значительной мере сохраняются.

При делении области G_Σ на множество субобластей в виде ячеек правильной сетки можно применять полиномы низких степеней (вплоть до кусочно-линейной интерполяции).

В последние десятилетия бурно развивается сплайн-аппроксимация, сплайн-интерполяция [7, 10, 11]. Это кусочно-полиномиальная аппроксимация (интерполяция), удовлетворяющая определенным условиям гладкости. Для функций одного-двух аргументов соответствующие теория и практика применения достигли высокого уровня развития. Однако с увеличением размерности пространства аргументов трудности здесь также быстро нарастают.

Другое направление составляет приближение ортогональными базисными функциями.

Библиографический список

1. *Лапшин, Э. В.* Математическое моделирование динамики полета летательного аппарата : монография / Э. В. Лапшин, А. А. Красовский, Н. К. Юрков ; под ред. Э. В. Лапшина. – Пенза : Изд-во Пенз. филиала РГУ ИТП, 2008. – 260 с.
2. *Лапшин, Э. В.* Исследование информационных процессов, протекающих в тренажерах / Э. В. Лапшин // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 87–93.
3. *Красовский, А. А.* Математическое моделирование и компьютерные системы обучения и тренажа / А. А. Красовский. – М. : Изд-во ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1989. – 256 с.

4. *Белоцерковский, С. М.* Исследование сверхзвуковой аэродинамики самолета на ЭВМ / С. М. Белоцерковский, Н. А. Кудрявцева, С. А. Попыталов, В. Г. Табачников. – М. : Наука, 1983. – 335 с.
5. *Красовский, А. А.* Аппроксимация функций многих аргументов в системах цифрового моделирования / А. А. Красовский // Техническая кибернетика. – 1989. – № 3. – С. 3–11.
6. *Данилов, А. М.* Информационно-вычислительные системы авиационных тренажеров модульной архитектуры с распараллеливанием вычислительных процессов / А. М. Данилов, Э. В. Лапшин, И. А. Гарькина, В. А. Трусов // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2016. – Т. 2. – С. 318–326.
7. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кабельков. – М. : Наука, 1987. – 384 с.
8. *Кубланов, М. С.* Математическое моделирование задач летной эксплуатации воздушных судов на взлете и посадке : монография / М. С. Кубланов. – М. : РИО МГТУ ГА, 2013. – 270 с.
9. *Кубланов, М. С.* Основные принципы математического моделирования динамики полета летательных аппаратов / М. С. Кубланов // Научный Вестник МГТУ ГА. Сер.: Аэромеханика и прочность. – 2001. – № 37. – С. 11–15.
10. *Лапшин, Э. В.* Кусочно-линейная интерполяция функций многих аргументов / Э. В. Лапшин, И. Ю. Семочкина, В. В. Самаров // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 4 (20). – С. 42–48.
11. *Кубланов, М. С.* Об адекватности математических моделей и задаче идентификации / М. С. Кубланов // Научный Вестник МГТУ ГА. Сер.: Аэромеханика и прочность. – 2009. – № 138. – С. 101–106.

Лапшин Эдуард Владимирович
доктор технических наук, профессор,
кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: edlapshin@mail.ru

Lapshin Eduard Vladimirovich
doctor of technical sciences, professor,
sub-department of radio equipment design
and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Гришко Алексей Константинович
кандидат технических наук, доцент,
кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: alexey-grishko@rambler.ru

Grishko Aleksey Konstantinovich
candidate of technical sciences, associate professor,
sub-department of radio equipment design
and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Рыбаков Илья Михайлович
заведующий лабораториями,
кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: rybakov_im@mail.ru

Rybakov Il'ya Mikhaylovich
head of laboratories,
sub-department of radio equipment design
and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 629.7.072.8
Лапшин, Э. В.
Методы аппроксимации функций многих переменных применительно к авиационным тренажерам / Э. В. Лапшин, А. К. Гришко, И. М. Рыбаков // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 1 (21). – С. 3–9. DOI 10.21685/2307-4205-2018-1-1.